Функциональный анализ — математическая дисциплина, основным предметом которой является изучение бесконечномерных, как правило, векторных пространств и их отображений. В пионерских исследованиях исходными элементами (переменными) были функции, а функция от такого аргумента называлась функционалом или функциональной операцией.

Первая потребность в функциональном анализе возникла в связи с рассмотрением задач с бесконечным множеством переменных, и постановки функционального анализа позволили сблизить их трактовку и изучение с конечномерными задачами. Например, задача о решении бесконечномерной системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{sk} x_k = b_s \qquad (s = 1,2,3, \dots)$$

могла быть записана просто в форме

$$Ax=y,$$

где x и y — элементы некоторых пространств бесконечных последовательностей. Точно так же интерпретировалось интегральное уравнение, задача вариационного исчисления формулировалась как поиск экстремума некоторого функционала в подходящем пространстве функций и т. п.

Функциональный анализ развивался одновременно с целым рядом направлений, в известной мере соприкасаясь с теорией множеств, абстрактной алгеброй и аксиоматической геометрией. Общая топология, теория меры, теория дифференциальных уравнений и ряд других разделов математики развивались в столь тесной связи с функциональным анализом, что нелегко указать точную границу между ним и этими дисциплинами.

Фундаментальные идеи функционального анализа зародились на рубеже XIX–XX вв. В 20-х годах он окончательно сформировался как самостоятельное направление. Среди его основоположников были Ж. Адамар, С. Банах, В. Вольтерра, Д. Гильберт, Дж. фон Нейман, М. Фреше. Ф. Рисс. Создание функционального анализа ознаменовало коренное изменение подхода к исследованию многих математических проблем. Рассмотрение отдельных функций и уравнений было заменено изучением совокупностей этих объектов. Абстрактная форма рассмотрения позволила объединять далекие, на первый взгляд, вопросы, обнаруживать более общие и в то же время более конкретные и глубокие закономерности.

Следует сказать, что в начале своего существования функциональный анализ вызывал известный скептицизм. Казалось, что это повторение на новом языке известных фактов классического анализа, любопытное, но не дающее ничего существенно нового. В дальнейшем по мере обогащения аппарата функционального анализа, углубления исследований, открытия новых объектов и фактов стало ясно, что это новая и фундаментальная часть математического анализа, вплоть до того, что она стала основным средством и объектом исследований математического анализа. Многие считают, что сейчас понятие функционального анализа почти эквивалентно понятию анализа. С самого начала развитие функционального анализа стимулировалось как внутренними потребностями самой математики (прежде всего, таких ее разделов, как вариационное исчисление, интегральные уравнения, гармонический анализ), так и прикладными задачами, особенно задачами квантовой механики. В настоящее время язык функционального анализа широко используется во всей непрерывной математике. Его аппарат вошел в фундамент целого ряда новых направлений теоретического и прикладного характера — таких, как теория случайных процессов, дифференциальная топология, теория динамических систем, теория оптимального управления, математическое программирование и т. п. Теоретико-функциональные методы все глубже проникают и в различные инженерные дисциплины. Эти методы находят все более широкое применение и в математической экономике.

Пространства, изучаемые в функциональном анализе, принадлежат, как правило, к классу векторных (или линейных) метрических пространств, в которых определено расстояние между точками; более обще, это топологические векторные пространства, в которых тем или иным образом введена топология, т. е. соответствующая система открытых множеств и связанное с нею понятие предела. При этом требуется известное согласование алгебраических операций и топологии. Наибольшее значение в первое время получили метрические векторные пространства, для которых естественным образом определяется расстояние между точками. Такое расстояние задается какой-либо функцией (метрикой), сопоставляющей каждой паре векторов пространства неотрицательное число, причем так, чтобы были выполнены аналоги определенных свойств обычного расстояния. Топология пространства естественным образом определяется такой метрикой.

Важнейший наиболее распространенный класс пространств — это *пространства нормированные.*

< ... >

Число различных направлений анализа весьма велико. Среди них — уже названные теория функциональных пространств Соболева, спектральный анализ и теория индекса, теория гильбертовых пространств, а также теория банаховых алгебр (И. М. Гельфанд) и операторных алгебр (Дж. фон Нейман), теория представлений и другие. Эти теории получили глубокое развитие, способствовали решению внутренних проблем самой математики, получили важнейшие применения в теоретической физике, механике, математической физике, теории вероятностей и т. п.

Мы сосредоточим внимание лишь на некоторых направлениях, которые либо уже используются в математической экономике, либо их применения можно ожидать в ближайшее время.

Хотя экономические проблемы, по существу, конечны — имеется ограниченное множество продуктов и ресурсов, время можно считать дискретным, но такие конечные модели невообразимо громоздки и необозримы и для анализа, и для расчета. Поэтому, гораздо эффективнее вместо них использовать родственные непрерывные континуальные модели. Такова, например, модель развития (роста) при техническом прогрессе с вмененными основными фондами (Р. Солоу, Л. В. Канторович), описываемая функциональным уравнением, хорошо поддающимся теоретическому анализу и расчету.

Во многих модельных построениях возникает вопрос не только об адекватности модели исследуемому процессу, но и о «реальности модели самой по себе», т. е. о существовании модели, обладающей нужными свойствами. При этом заведомо известная неадекватность модели реальному процессу не позволяет сделать такое заключение на основании анализа исходных данных.

Вопрос существования нужной модели в известной мере сродни вопросу существования решения. Геометрически он может быть сформулирован так. Если мы выделяем два множества в пространстве моделей — одно, обладающее одной частью свойств, другое — другой, то имеют ли они общую точку? Существует значительная литература о методе неподвижных точек: принцип Качиполли, принцип Шаудера, теорема Какутани, упомянутая выше теорема Фана и др. В частности, таким образом получается известная теорема Эрроу-Вальда.

Скарфом и другими были развиты не только качественные, но и количественные методы нахождения решений моделей, в частности оптимизационных. Хотя эти методы громоздки и пока недостаточно эффективны, но сам но себе принципиально новый подход к поиску решений является весьма ценным.

Говоря о численных методах нахождения решений, необходимо напомнить о том значении, которое они имеют в экономике. Мало где в других науках встречаются задачи таких масштабов и такой сложности, как в моделях экономических процессов. Поэтому то развитие, которое получили численные методы алгебры и анализа в результате создания функционально-аналитического подхода к ним, призваны сыграть большую роль в математической экономике.

Это следующие группы методов:

1. Метод наискорейшего спуска и градиентные методы.
2. Методы ньютоновского типа.
3. Общая теория приближенных методов.
4. Принцип мажорант и методы последовательных приближений.

По ним имеется обширная литература в функциональном анализе и многих разделах прикладной математики, порождено огромное число эффективных численных методов решения с точной характеристикой наличия сходимости и ее быстроты. Названные методы дают также и много других важных средств исследования экономических моделей.

С их помощью в ряде случаев на основе расчетов могут устанавливаться строго существование решения, область единственности, некоторые свойства решения. В ряде случаев приближенное решение может быть получено на компьютере не в численном, а в аналитическом (формульном) виде. Эта область получила названия «вычислительное доказательство» и «аналитические вычисления на машинах», «доказательные вычисления». В то же время значение названных методов для экономики, в частности, для задач на поиск равновесия или экстремума, полностью не раскрыто.

При развитии теории функциональных пространств одна сторона реальной действительности оказалась в ней на некоторое время упущенной. Для практических объектов наряду с алгебраическими и другими соотношениями большое значение имеет соотношение сравнения. Простое сравнение, имеющееся между всеми объектами, носит обедненный характер, например, можно все виды расположить по их весу, но это мало что дает. Гораздо более естественным является упорядочение, которое для тех случаев, когда это естественно, определяется или фиксируется, а в других случаях остается неопределенным (частичное упорядочение или полуупорядочение). Например, два набора продуктов несомненно следует считать сравнимыми и первый больше второго, если в первом каждого продукта соответственно больше, чем во втором. Если же часть больше в одном, часть больше в другом, то можно сравнение не фиксировать.

Так, в свое время была построена теория полуупорядоченных пространств, и прежде всего теория *K*-пространств, определенных выше. Она получила разнообразные применения как в теоретических вопросах анализа, так и в построении некоторых прикладных методов, например в теории мажорант в связи с интенсивным изучением метода последовательных приближений. В то же время полностью ее возможности до сих пор еще не раскрыты. Недооценено также и значение этой ветви функционального анализа для экономики. Между тем, в экономике соотношения сравнения и сопоставления играют исключительную роль, и уже при возникновении *K*-пространств было ясно, что при анализе экономики они найдут свое место и дадут полезные плоды.

Теория *K*-пространств имеет и другое значение — их элементы могут использоваться как числа. В частности, при построении пространств типа Банаха в качестве нормы вместо чисел могут использоваться элементы такого пространства, конечномерного или бесконечномерного. Подобная нормировка объектов является гораздо более точной. Скажем, функция нормируется не своим максимумом на всем интервале, а десятком чисел — максимумами ее на частях этого интервала. Очевидно, что возникающая норма гораздо точнее характеризует функцию. В частности, в экономике этот подход очень полезен при применении агрегирования, если он делается более детальным, чем обычная стоимость, образом. Итак, большие системы путем агрегирования упрощаются до систем меньшего размера, но все же довольно близким по свойствам к исходным.

Имеется ряд других применений частично упорядоченных множеств — в экономике, выпуклом анализе, некоторых расчетах и т. д., в то же время их использование весьма недостаточно. Большее проникновение этих методов функционального анализа в экономику сыграет должную роль в изучении экономических систем.

Выше отмечены применения функционального анализа в экономике. В свою очередь, экономическая проблематика оказывает влияние на развитие самой математики. Это естественно, так как экономика представляет собой огромную область исследований с чертами существенных принципиальных отличий от тех классических физико-математических дисциплин, на базе которых шло развитие функционального анализа. Нужно отметить тот очевидный факт, что теория систем линейных неравенств и методов их решения развилась на сто лет позже, чем теория систем линейных уравнений, и притом именно в связи с потребностями экономики.

Еще один интересный и важный пример — транспортная задача. Это классическая задача об определении путей перевозки материалов от одних пунктов к другим, которая была математически оформлена и нашла эффективные методы решения, в частности метод потенциалов, около 1940 г. Известно, какое значение названная задача и ее обобщения, например производственно-транспортная задача, имеют для экономики — в вопросах размещения производства и ряде других.

Первоначальное изложение транспортной задачи под названием задачи о перемещении масс дано в 1942 г. (Л. В. Канторович). При этом, в частности, были проанализированы задача перевозок и задача выравнивания грунта, важная при строительстве аэродромов. Основная задача формулировалась в весьма абстрактном виде для произвольного метрического пространства, и довольно естественно введено понятие расстояния между двумя множествами одинаковой массы в компакте. Оно определено как минимальный объем затрат по перемещению одной массы из одного места в другое.

Названная метрика в дальнейшем стала широко применяться в теории вероятностей для распределений, в геометрии и некоторых других областях математического знания. Ее применения в самом функциональном анализе привели к ряду новых интересных теорем. Можно назвать и другие примеры, где математический аппарат, развитый в связи с разнообразными задачами экономики, получил определенные приложения в самой математике и в совершенно новых прикладных науках. В этом нет ничего удивительного, потому что экономический анализ по своему многообразию и сложности, вероятно, превосходит даже проблематику современной физики. Следует ожидать, что в дальнейшем углубление математического анализа проблем экономики станет еще более мощным источником развития математического аппарата, идей самой математики.

Из тех теорий, которые перечислены выше, остановимся на использовании общей теории приближенных методов в экономике. Основная идея этой теории содержит общий принцип изучения больших систем, причем не только принцип системного анализа, но и общий гносеологический принцип исследований. Он состоит попросту в том, что данной большой сложной модели, расположенной в некотором пространстве, в известном смысле сопоставляется более простая, менее многомерная модель в этом же или другом пространстве посредством однозначного или одно-многозначного соответствия. Изучение типа упрощенной модели оказывается более доступным и осуществимым. При этом принципы и конкретные теоремы общей теории нередко позволяют на основе исследования более простой малой системы строить точные заключения о первоначальной большой системе, получать численные приближенные, но довольно точные оценки ее характеристик и осуществлять теоретический анализ системы — устанавливать существование решения, его единственность, асимптотические свойства и т. д.

Подчеркнем, что имеются разные средства построения таких упрощенных систем в экономике — переход к малоразмерным задачам, однопродуктовым или глобальным задачам и т. д. В частности, одним из общих приемов такого рода построения упрощенной системы является метод агрегирования. В этой связи применение общей теории приближенных методов и ее методологии даст существенные результаты в исследовании и экономическом анализе.

В заключение можно выразить убежденность в том, что все более широкое применение методов функционального анализа в математической экономике является весьма перспективным, и следует ожидать, что оно даст существенный вклад в развитие этой важной отрасли науки.

г. Москва. Статья поступила 16 мая 1986 г.

Опубликовано в «Сибирском математическом журнале», т. XXVIII, № 1, январь–февраль 1987 г.

(Текст приводится по книге:
Леонид Витальевич Канторович: человек и учёный/ Редакторы-составители В.Л. Канторович, С.С. Кутателадзе, Я И. Фет. - Новосибирск Издательства СО РАН, : Филиал «Гео», 2004.)