Журнал НЭА
№1 (13), 2012
С. 181–185.

Б.А. Самокиш[1]
Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург

Л.В. Канторович и вычислительная математика

Леонид Витальевич Канторович известен всему миру своим вкладом в экономическую науку. Может быть, прежде всего, он был гениальным математиком, внесшим огромный вклад в различные разделы математики. В настоящей статье мы хотим охарактеризовать работы Леонида Витальевича в области вычислительной математики и влияние его идей на дальнейшее развитие этой области, в основном, в трудах ленинградской математической школы.

Среди работ Леонида Витальевича по вычислительной математике центральное место занимает статья «Функциональный анализ и прикладная математика» (Канторович, 1948), за которую, как известно, Л.В. Канторович получил Государственную (Сталинскую) премию. Основная идея статьи – вложение вычислительной математики в функциональный анализ. Эта статья оказала большое влияние на развитие теории приближенных методов. Язык функционального анализа позволил выявить во всем разнообразии конкретных методов их идейную основу, а сформулированные и доказанные Л.В. Канторовичем общие теоремы (например, такие как теорема о разрешимости точного уравнения, когда известна разрешимость приближенного) стали инструментом для исследования приближенных методов решения широкого круга задач.

В первой части статьи излагается общая теория приближенных методов для линейных уравнений. Приближенное уравнение рассматривается в том же банаховом пространстве, что и исходное, в операторе выделяется главная часть – единичный или заведомо обратимый оператор, один и тот же в точном и приближенном уравнении. Вторая часть оператора аппроксимируется, причем равномерно, так что, по существу, рассматривается уравнение второго рода с вполне непрерывным оператором. Далее строится общая теория для решения этих уравнений и рассматриваются ее применения к уравнениям, приводящимся к уравнениям второго рода. Л.В. Канторовичем рассмотрены применения построенной общей теории к интегральным уравнениям и к дифференциальным уравнениям, как обыкновенным, так и в частных производных.

Во второй части статьи излагается метод наискорейшего спуска, который был разработан Леонидом Витальевичем (Канторович, 1945) для решения задачи о минимизации квадратичного функционала. В этой работе была получена оценка скорости сходимости метода. Следует отметить, что у Леонида Витальевича были предшественники. О.Л. Коши рассмотрел этот метод для случая конечномерного пространства. В статье Леонида Витальевича предложен так называемый, многошаговый метод наискорейшего спуска, скорость сходимости которого выше и она определяется числом шагов на каждой итерации многошагового метода. Скорость сходимости этого метода оценил М.Ш. Бирман (Бирман, 1950) с помощью сравнения с новым итерационным методом, использующим конструкцию операторного полинома, наименее уклоняющегося от нуля (Бирман, 1952). Этот прием упростил оценку и для основного варианта метода. Другой сходный метод был предложен учеником и соратником Леонида Витальевича профессором М.К. Гавуриным (Гавурин, 1950), который использовал в итерационном методе полином наилучшего приближения для элементарной функции $1/x$. Применение метода для случая отрыва одного собственного значения изучал и улучшил оценки скорости сходимости Б.А. Самокиш в работе (Самокиш, 1957). В другой работе (Самокиш, 1958), посвященной применению метода наискорейшего спуска к задаче на собственные значения, также получена оценка скорости сходимости.

Далее в (Канторович, 1948) рассмотрен метод Ньютона. Абстрактная формулировка позволила Леониду Витальевичу перенести метод на практически любые нелинейные уравнения и даже усовершенствовать доказательство сходимости. Впоследствии по инициативе профессора С.Г. Михлина эти применения метода стали называть методом Ньютона–Канторовича.

Положения общей теории приближенных методов Канторовича вошли в научный обиход математиков-вычислителей и вызвали появление других подобных теорий. Можно назвать общую теорию устойчивости и сходимости разностных методов В.С. Рябенько-

[1] Борис Андреевич Самокиш в 1950-е годы был аспирантом Л.В. Канторовича (Примеч. ред.)

Журнал НЭА
№1 (13), 2012
С. 181–185.

го и А.В. Филиппова (Рябенький, Филиппов, 1956), созданную под влиянием теории Канторовича. Здесь уже не выделяется главная часть оператора, соответственно аппроксимация оператора уравнения и обратимость приближенного оператора не доказываются, а постулируются. Моделью банахова пространства для приближенных решений здесь служит не отдельное приближенное пространство, а семейство пространств возрастающей размерности. Это соответственно отражается в определении устойчивости как равномерной на семействе ограниченности обратных операторов, но еще более, пожалуй, это отражается на определении спектра: понятия регулярной точки и точки спектра вводятся не для отдельного оператора, а для семейства в целом.

Новый вариант общей теории приближенных методов был разработан М.К. Гавуриным (1971). Новым в этой теории является введение понятия каркаса приближенного решения. Каркас – это численный представитель приближенного решения: возможно, это таблица значений, как в методе сеток, а возможно, это таблица коэффициентов при базисных функциях, как в проекционных методах и т.п. Введение понятия каркаса позволило включить в теорию вопрос о численной устойчивости метода. Вводится понятие устойчивости процесса нахождения каркасов: процесс устойчив, если равномерно ограничены числа обусловленности приближенного оператора. Следует также отметить, что в рамках новой общей теории можно исследовать сходимость метода сеток так, как в рамках общей теории приближенных методов Канторовича исследуется сходимость проекционных методов.

Когда писалась статья (Канторович, 1948), явление численной неустойчивости не то что не было известно, но, видимо, не было еще достаточно осмыслено. Понятие обусловленности матриц появилось позже, и неустойчивость решения задач с матрицами большой размерности на компьютерах еще не была обнаружена. Уместно отметить, что неустойчивость методов типа Ритца–Галеркина была обнаружена уже для небольшой размерности матриц систем линейных уравнений этих методов (Самокиш, 1964). Для единичного оператора – задача наилучшего квадратичного приближения сводится к решению системы линейных уравнений с матрицей Грама системы базисных функций. Оператор $R_n \to R_n$, описываемый этой матрицей, можно представить как произведение двух операторов: первый – назовем его координатным – действует из R_n в L_2 и сопоставляет вектору коэффициентов линейную комбинацию базисных функций; второй же – проекционный – функции из L_2 сопоставляет набор проекций (скалярных произведений) на базисные функции. Второй оператор сопряжен к первому. Обусловленность матрицы Ритца для уравнения с ограниченным оператором оценивается через произведение их чисел обусловленности. Для системы степеней независимой переменной, наихудшей из известных, обусловленность обоих операторов имеет грубый порядок $\sim(\sqrt{2}+1)^n$: проекционный оператор может существенно отличаться от координатного, например, в методах моментов и коллокаций. В (Самокиш, 1964) даны оценки чисел обусловленности для некоторых систем базисных функций и функционалов.

Переходя к другим, более ранним работам Леонида Витальевича, прежде всего следует назвать блестящий результат о сходимости полиномов С.Н. Бернштейна для аналитической функции (Канторович, 1931): оказывается, сходимость имеется в максимальном эллипсе с фокусами в концах отрезка, внутри которого функция аналитична. Это парадоксально, так как обычно такая сходимость является следствием сходимости на отрезке со скоростью порядка наилучшего приближения, а полиномы Бернштейна сходятся медленно.

В 1934 г. Леонид Витальевич предложил метод решения задачи о минимуме квадратичного функционала, который можно рассматривать как обобщение метода Ритца (Канторович, 1934). В этом методе приближенное решение ищется как линейная комбинация известных функций меньшего числа переменных с коэффициентами, которые являются функциями остальных переменных. Так, в двумерном случае исходная задача будет сведена не к решению системы линейных алгебраических уравнений, а к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Такой подход при наличии априорной информации о свойствах искомого решения может оказаться весьма продуктивным. В принципе этот метод можно использовать для сведения задач большей размерности к решению большего числа задач меньшей размерности.

Метод коллокаций, впервые предложенный Леонидом Витальевичем в статье (Канторович, 1934), в дальнейшем получил обоснование и развитие на основе общей теории приближенных методов в работах Э.Б. Карпиловской (Карпиловская, 1953, 1963), ученицы Леонида Витальевича.

Журнал НЭА
№1 (13), 2012
С. 181–185.

Назовем, наконец, выдающийся результат деятельности Леонида Витальевича в области вычислительной математики – совместную с В.И. Крыловым монографию (Канторович, Крылов, 1936), после переработки вышедшую под другим названием (Канторович, Крылов, 1941) – первую в мире по этому направлению. Здесь уместно напомнить, что эта монография переведена на многие языки и издана за рубежом. Особую ценность в ней представляет вторая половина книги – изложение цикла работ Леонида Витальевича по численным методам конформного отображения. Книга выдержала ряд изданий, впоследствии В.И. Крылов с сотрудниками на ее основе написал книгу (Крылов, Бобков, Монастырный, 1972). В (Канторович, Крылов, 1936) вошли также результаты, полученные Леонидом Витальевичем по вопросу о сходимости метода Ритца. Как известно, решение задачи методом Ритца является наилучшим приближением в энергетической метрике, поэтому вопрос о сходимости есть, по существу, вопрос о возможности приближения данного решения с помощью функций из подпространства, в котором ищется приближенное решение. Для первой краевой задачи для эллиптического уравнения использовались для приближения решения функции особого вида – функции, обращающиеся в нуль на границе области с произвольной кусочно-гладкой границей. Теоремы аппроксимации такими функциями доказаны И.Ю. Харрик (1955, 1963) – также ученицей Леонида Витальевича.

Наиболее завершенные результаты по сходимости проекционных методов для дифференциальных уравнений принадлежат профессору И.К. Даугавету (1976, 1988), в прошлом аспиранту Л.В. Канторовича. Им были даны точные по порядку оценки скорости сходимости и, в частности, оценки скорости сходимости старших производных, не входящих в энергетическую норму. Для этого он получил аккуратные оценки для полиномов от одной и многих переменных в различных нормах, включающих производные (Даугавет, 1976).

В рамках ленинградской математической школы возникло новое направление в вычислительной математике – вариационно-разностные или проекционно-сеточные методы решения краевых задач для уравнений в частных производных. Первой работой в этом направлении была работа Р. Куранта, опубликованная в 1943 г., в которой методом Ритца со специальными координатными функциями (кусочно-линейными «пирамидками») были построены обычные разностные схемы. Эта работа осталась незамеченной. В 1963 г. в Ленинграде была опубликована работа Л.А. Оганесяна (1985), в которой использовались те же координатные функции, что и в работе Р. Куранта, и были даны оценки скорости сходимости метода. Фактически – это метод Галеркина со специальными координатными функциями. В 1964 г. была опубликована похожая работа (Сеа, 1964). За рубежом вариационно-разностный метод назвали методом конечных элементов (МКЭ): в 1943 г. метод был предложен немецкими инженерами, которые и дали ему такое название.

Работы, посвященные этому методу, были поддержаны Г.И. Марчуком. Он не только включил информацию о методе в свою монографию (Марчук.1973), но и организовал в 1973 г. в Академгородке под Новосибирском первую в стране математическую конференцию. В Москве метод поначалу не привлек внимания, на работы не было ссылок.

В ЛО ЦЭМИ АН СССР в период 1965–1975 гг. в лаборатории численных методов под руководством Л.А. Оганесяна сложилась школа по разработке и обоснованию вариационно-разностных методов решения эллиптических уравнений (Оганесян, Руховец, 1979). Несомненно, эти исследования опирались на достижения ленинградской школы вычислительной математики. Л.В. Канторович поддержал эти исследования, выдав авторам монографии (Оганесян, Руховец, 1979) рекомендацию в ВААП для публикации монографии за рубежом. Однако по не зависящим от авторов причинам эта публикация не состоялась.

Метод конечных элементов имеет явное преимущество перед обычным разностным методом: гибкость в конструкции сетки, простота и удобство аппроксимации, легкость построения аппроксимаций высокого порядка точности, сравнительная простота аппроксимации естественных краевых условий.

В разработку метода заметный вклад внесли ленинградские математики: Л.А. Руховец (1970) получил ряд важных результатов, касающихся конструкции методов и вопросов сходимости; В.Г. Корнеев (1977) построил схемы высокого порядка точности; Г.П. Астраханцев (1971) разработал и обосновал сходимость ряда итерационных методов, оптимальных по объему вычислений, для решения возникающих систем сеточных уравнений.

Еще одно направление, которое возникло на этой благодатной почве: апостериорные оценки обратных операторов для краевых задач. Пусть мы решаем краевую задачу разностным методом и допустим, что матрица системы обратима; тогда, видимо, и для самой краевой задачи, в силу аппроксимации, суще-

Журнал НЭА
№1 (13), 2012
С. 181–185.

ствует обратный оператор. Здесь, естественно, подходит применение одной из теорем общей теории о существовании обратного к оператору точного уравнения.

В работах Н.А. Смолянской (Самокиш, Смолянская, 1976; Смолянская, 1976) рассмотрено применение общей теории к двухточечным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Напомню, что в теории Канторовича точный и приближенный оператор имеют одинаковую главную часть – значит, нужно моделировать эту главную часть. Эта задача решается с помощью восполнений; проверяется аппроксимация «неглавной» части и применятся теорема Канторовича. Любопытно, что оказалось возможным точно вычислить норму обратной матрицы с помощью встречных прогонок. В этих работах Н.А. Смолянской рассмотрен также ряд вариантов, различающихся выбором вида восполнений и норм, в частности слабых.

Подводя итог этому краткому обзору, следует отметить, что Л.В. Канторович не только создал общую теорию приближенных методов и предложил ряд новых методов, но и сам принимал участие в вычислительных работах. Об этих работах подробно рассказывается в двухтомнике (Леонид Витальевич Канторович, 2002). Приведем два примера: под руководством Л.В. Канторовича были созданы таблицы бесселевых функций; в 1948 г. он возглавил Вычислительный отдел, выполнивший один из расчетов для Атомного проекта (Залгаллер, 2011). Эти расчеты проводились на электромеханических устройствах (в это время еще не было электронно-вычислительных машин).

Столетие со дна рождения Л.В. Канторовича отмечено двумя конференциями: 19 января 2012 г. в ЦЭМИ РАН и 7–9 февраля 2012 г. в Санкт-Петербургском государственном университете. Еще две конференции состоятся в Санкт-Петербурге в июне 2012 г.

Литература

Астраханцев Г.П. (1971). Об одном итерационном методе решения сеточных эллиптических задач // *Журнал выч. математики и мат. физики.* Т. 11. № 2. С. 439–448.

Бирман М.Ш. (1950). Некоторые оценки для метода наискорейшего спуска // *УМН.* Т. V. № 9. С. 152–155.

Бирман М.Ш. (1952). Об одном варианте метода последовательных приближений // *Вестник ЛГУ. Сер. мат., физ., хим.* Т. 9. С. 69–76.

Гавурин М.К. (1950). Применение полиномов наилучшего приближения для улучшения сходимости итеративных процессов // *УМН.* Т. 5. Вып. 3(37). С. 156–160.

Гавурин М.К. (1971). Лекции по методам вычислений. Л.: Наука.

Даугавет И.К. (1976). Некоторые неравенства для многочленов в многомерном случае. В сб. «*Методы вычислений*». Вып. 10. Л.: ЛГУ.

Даугавет И.К. (1977). О сходимости старших производных в проекционных методах. Записки научных семинаров ЛОМИ. Т. 70. С. 11–18.

Даугавет И.К. (1988). Вопросы теории приближенных методов и некоторые прикладные задачи конструктивной теории функций. Дисс. докт. физ.-мат. наук. Л.

Залгаллер В.А. (2011). Воспоминания о совместной работе с Леонидом Витальевичем Канторовичем // *Экономика и мат. методы.* Т. 47. № 4. С. 15–21.

Канторович Л.В. (1931). О сходимости последовательных полиномов С.Н. Бернштейна за пределами основного интервала // *Изв. АН СССР, ОМЕН.* № 8. С. 1103–1115.

Канторович Л.В. (1934). Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных // *ДАН СССР.* Т. 2. № 9. С. 532–536.

Канторович Л.В. (1934). Применение теории интегралов Стилтьеса к расчету балки, лежащей на упругом основании // *Труды Лен. Института промышленного строительства.* Вып. 1. С. 17–34.

Канторович Л.В. (1945). Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичного функционала // *ДАН СССР.* Т. 48. С. 485–487.

Канторович Л.В. (1948). Функциональный анализ и прикладная математика // *УМН.* Т. III. № 6. С. 89–185.

Канторович Л.В., Крылов В.И. (1936). Методы приближенного решения уравнений в частных производных. Л., М.: ОНТИ.

Канторович Л.В., **Крылов В.И.** (1941). Приближенные методы высшего анализа. Л., М.: ГТТИ.

Карпиловская Э.Б. (1963). О сходимости метода коллокаций для некоторых граничных задач математической физики // *Сибирский математический журнал.* Т. 4. № 3.

Карпиловская Э.Б. (1953). О сходимости интерполяционного метода для обыкновенных дифференциальных уравнений // *УМН.* Т. 8. № 3.

Журнал НЭА
№1 (13), 2012
С. 181–185.

Корнеев В.Г. (1977). Схемы метода конечных элементов повышенной точности. Л.: ЛГУ.

Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. (1972, 1975). Вычислительные методы высшей математики. Т. 1, 2. Минск: Вышэйшая школа.

Леонид Витальевич Канторович (2002). Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый / Под ред. В.Л. Канторович, С.С. Кутателадзе, Я.И. Фет. Новосибирск: Изд-во СО РАН, филиал «Гео».

Марчук Г.И. (1973). Методы вычислительной математики. М.: Наука.

Оганесян Л.А. (1985). Численный расчет плит. В сб.: «*Решение инженерных задач на электронно-вычислительных машинах*». Вып. 13. Л.: ЛГУ. С. 71–81.

Оганесян Л.А., Руховец Л.А. (1979). Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АССР.

Руховец Л.А. (1970). Исследование скорости сходимости вариационно-разностных схем для двумерных эллиптических уравнений второго порядка. Дисс. канд. физ.-мат. наук. Л.: ЛОМИ АН СССР.

Рябенький В.С., Филиппов А.В. (1956). Об устойчивости разностных уравнений. М., Гостехиздат.

Самокиш Б.А. (1957). Исследование быстроты сходимости метода наискорейшего спуска // *УМН*. Т. XII. № 1. С. 282–240.

Самокиш Б.А. (1958). Метод наискорейшего спуска в задаче о собственных значениях полуограниченных операторов // *Ивз. вузов. Математика*. Т. 5. С. 105–114.

Самокиш Б.А. (1964). К устойчивости абстрактного метода Галеркина // *Вестник ЛГУ. Сер. мат., физ., хим.* № 1.

Самокиш Б.А., Смолянская Н.А. (1976). Об апостериорных оценках решений краевых задач. Численная апостериорная оценка обратного оператора I краевой задачи для обыкновенного дифференциального оператора 2-го порядка // *Деп. в ВИНИТИ*. № 1275, 1976. Реф.: // *Вестник ЛГУ. Сер. мат., мех., астр.* № 19. С. 160.

Смолянская Н.А. (1976). Об апостериорных оценках решений краевых задач. Некоторые новые апостериорные оценки для обыкновенной дифференциальной краевой задачи 2-го порядка // *Деп. в ВИНИТИ*. № 1275, 1976. Реф.: // *Вестник ЛГУ. Сер. мат., мех., астр.* № 19. С. 160.

Харрик И.Ю. (1955). О приближении функций, обращающихся на границе в нуль, функциями особого вида // *Математический сборник*. Т. 37.

Харрик И.Ю. (1963). О приближении функций, обращающихся в нуль на границе области вместе с частными производными, функциями особого вида // *Сибирский математический журнал*. Т. 4. № 2.

Cea J. (1964). Approximation Variationelle des Problemes aux Limites. Ann. Inst. Fourier. Grenoble. Band 14. № 2.

Поступила в редакцию 28 февраля 2012 года

О.К. Даугавет
Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН
И.В. Романовский
Санкт-Петербургский государственный университет

Журнал НЭА
№1 (13), 2012
С. 185–190.

О деятельности и работах Л.В. Канторовича в области программирования

Роль Л.В. Канторовича в развитии математики и экономики известна и признана во всем мире, но не следует забывать и о его существенном вкладе в становление информатики, а именно в программирование для ЭВМ – электронно-вычислительных машин.

Л.В. Канторович стал уделять внимание вычислительной технике и вопросам проведения на ней вычислений, начиная с очень скромного вычислительного средства (даже еще и не электронного) – счетно-аналитического комплекта, предназначенного для обработки массивов перфокарт с финансовой и статистической информацией. «Команда Л.А. Люстерника» планировала применить эту технику для построения некоторых видов артиллерийских таблиц.

В военное время было трудно принять полноценное участие в изучении возможностей вычислительной техники, но практически сразу же после войны начались работы по этой теме. Приведем ниже полностью неболь-